POTENCIAS

Potencias de exponente natural

Una **potencia** es un producto de factores iguales. Está formada por la **base** y el **exponente.**

Por ej: 3.3.3.3 $=3^4$

El factor que se repite se llama base (3 en el ejemplo). El número de veces que se repite el factor, o sea la base, se llama exponente (en nuestro ejemplo es 4). Esto significa que si se tiene la potencia 2^6 (dos elevado a seis o a la sexta), la base será 2 y el exponente 6, lo cual dará como resultado 64 porque el 2 se multiplica por si mismo 6 veces ($2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$).

Ejemplos:

$2^5 = 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 = 32$ El exponente es 5, esto significa que la base, el 2, se debe multiplicar por sí misma cinco veces.

$3^2 = 3 \bullet 3 = 9$ El exponente es 2, esto significa que la base (3) se debe multiplicar por sí misma dos veces.

$5^4 = 5 \bullet 5 \bullet 5 \bullet 5 = 625$ El exponente es 4, esto significa que la base (5) se debe multiplicar por sí misma cuatro veces.

Una potencia puede representarse en forma general como:

$$\boxed{\mathbf{a^n = a \bullet a \bullet a \bullet \ldots\ldots}}$$

Potencias de exponente 0

Vale 1 cualquiera que sea la base a no nula $\mathbf{a^0 = 1}$**.** Por ej: $5^0 = 1$

Potencias de exponente 1

$\mathbf{a^1 = a}$ **.** Por ej: $5^1 = 5$

Potencias de exponente entero negativo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a \neq 0$$

Por ej:

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

Cuando tenemos un exponente negativo hay que INVERTIR LA BASE para pasar a exponente positivo.

Por ejemplo: $2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$ **y** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2}=\frac{9}{4}$

Pero ATENCIÓN a cuando la base también es negativa

Por ejemplo: $(-3)^{-4}=\frac{1}{(-3)^4}=\frac{1}{81}$ **o bien** $(-5)^{-3}=\frac{1}{(-5)^3}=\frac{1}{-125}$

Fíjate que el poner el inverso de la base no significa cambiar el signo de la misma.

Al final el signo del resultado dependerá de si el exponente es par o impar.

Con las fracciones ocurre lo mismo.

Así: $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-5}=\left(-\frac{5}{2}\right)^{5}=-\frac{3125}{32}$ **o bien** $\left(-\frac{4}{3}\right)^{-2}=\left(-\frac{3}{4}\right)^{2}=\frac{9}{16}$

**Veamos que fácil queda todo cuando
la base es una fracción de numerador la unidad.**

Ejemplos: a) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-5}=5^5=3125$ **b)** $\left(-\frac{1}{8}\right)^{-3}=(-8)^3=-512$

!!!AL HALLAR EL INVERSO PARA PASAR A EXPONENTE POSITIVO NO SE CAMBIA EL SIGNO!!!
Al final, cuando efectuamos la potencia, se cambia o nó según sea el exponente par o impar.

Si te fijas, todos los números que están elevados a exponentes negativos, al pasarlos a exponentes positivos pasan del numerador al denominador y viceversa.

Así que si queremos que en una expresión *todos los exponentes sean positivos* haremos lo siguiente:

$$\frac{a^{-2}.b^{3}.m^{-5}}{x^{2}.y^{-4}.z^{-2}}=\frac{b^{3}.y^{4}.z^{2}}{x^{2}.a^{2}.m^{5}}$$

Pero si lo que pretendemos es que *no quede nada en el denominador*, todas las potencias del denominador las podemos pasar al numerador cambiando el signo del exponente:

$$\frac{a^{-2}.b^{3}.m^{-5}}{x^{2}.y^{-4}.z^{-2}} = a^{-2}.b^{3}.m^{-5}.x^{-2}.y^{4}.z^{2}$$

REGLAS de las POTENCIAS

Vamos a sintetizar lo explicado en clase sobre la forma de operar con potencias (recuerda que hemos visto el porqué se hace así)

- **Multiplicación de potencias con la misma base** $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Por ej: $2^5 \cdot 2^2 = 2^{5+2} = 2^7$

- **División de potencias con la misma base** $a^m : a^n = a^{m-n}$

Por ej: $2^5 : 2^2 = 2^{5-2} = 2^3$

- **Potencia de un potencia** $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Por ej: $(2^5)^3 = 2^{15}$

- **Multiplicación de potencias con el mismo exponente** $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

Por ej: $2^3 \cdot 4^3 = 8^3$

- **División de potencias con el mismo exponente** $a^n : b^n = (a : b)^n$

Por ej: $6^3 : 3^3 = 2^3$

A la hora de hacer <u>ejercicios con potencias</u> recuerda que:

1º Descomponemos en factores primos los números compuestos.

2º Aplicamos las propiedades factor por factor.

3º Para dar el resultado tendremos en cuenta qué se nos pide en el enunciado, dependiendo de:

a) Calcular el número final. Por ejemplo, si nos queda 3^{-5}, daremos $\frac{1}{243}$

b) Dejar como una potencia de exponente positivo. Por ej, 3^{-5} damos $\left(\frac{1}{3}\right)^5$

Ejercicios resueltos:

a) $3^3 \cdot 3^4 \cdot 3 = 3^8$
b) $5^7 : 5^3 = 5^4$
c) $(5^3)^4 = 5^{12}$
d) $(5 \cdot 2 \cdot 3)^4 = 30^4$
e) $(3^4)^4 = 3^{16}$
f) $[(5^3)^4]^2 = (5^{12})^2 = 5^{24}$
g) $(8^2)^3 = [(2^3)^2]^3 = (2^6)^3 = 2^{18}$
h) $(9^3)^2 = [(3^2)^3]^2 = (3^6)^2 = 3^{12}$
i) $2^5 \cdot 2^4 \cdot 2 = 2^{10}$
j) $2^7 : 2^6 = 2$
k) $(2^2)^4 = 2^8$
l) $(4 \cdot 2 \cdot 3)^4 = 24^4$
m) $(2^5)^4 = 2^{20}$
n) $[(2^3)^4]^0 = (2^{12})^0 = 2^0 = 1$
o) $(27^2)^5 = [(3^3)^2]^5 = (3^6)^5 = 3^{30}$
p) $(4^3)^2 = [(2^2)^3]^2 = (2^6)^2 = 2^{12}$
q) $(-2)^2 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^4 = (-2)^9 = -512$
r) $(-2)^{-2} \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^4 = (-2)^5 = -32$
s) $2^{-2} \cdot 2^{-3} \cdot 2^4 = 2^{-1} = 1/2$
t) $2^2 : 2^3 = 2^{-1} = 1/2$
u) $2^{-2} : 2^3 = 2^{-5} = (1/2)^5 = 1/32$
v) $2^2 : 2^{-3} = 2^5 = 32$
w) $2^{-2} : 2^{-3} = 2$

❖ Realiza las siguientes operaciones con potencias y deja el resultado como una sola potencia de exponente positivo:

1 $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^5$

2 $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3}$

3 $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$

4 $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-5} = \left(\frac{3}{2}\right)^5$

5 $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3} = \frac{2}{3}$

6 $\left(\frac{2}{3}\right)^{2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$

7 $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-5} = \left(\frac{3}{2}\right)^{5}$

8 $\left(\frac{2}{3}\right)^{2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{5}$

9 $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{2}{3}$

10 $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{5}$

11 $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{3} = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{6}$

12 $\left\{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{3}\right\}^{-4} = \left\{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{3}\right\}^{-4} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-24} = \left(\frac{3}{2}\right)^{24}$

13 $\left(\frac{4}{9}\right)^{-2} : \left(\frac{27}{8}\right)^{-3} =$

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{-2} : \left(\frac{27}{8}\right)^{-3} = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{-2} : \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{3}\right]^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} : \left(\frac{3}{2}\right)^{-9} =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} : \left(\frac{2}{3}\right)^{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-13} = \left(\frac{3}{2}\right)^{13}$$

14 $\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\left(\frac{81}{16}\right)^{-2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-5}\left(\frac{2}{3}\right)\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\right]^{-2}\left(\frac{8}{27}\right)^{3}} =$

$$=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{4}\right]^{-2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-5}\left(\frac{2}{3}\right)\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\right]^{2}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\right]^{3}}=$$

$$=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\left(\frac{3}{2}\right)^{-8}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-5}\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\left(\frac{2}{3}\right)^{9}}=$$

$$=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\left(\frac{2}{3}\right)^{8}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\left(\frac{2}{3}\right)^{9}}=$$

$$=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{10}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{25}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-15}=\left(\frac{3}{2}\right)^{15}$$